Références :
Les matrices, Denis Serre

Notation.

$$H_n^{++} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : M^* = M \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}, X^*MX > 0\}$$

$$U_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : M^*M = I_n\}$$

Théo. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \psi : H_n^{++} \times U_n & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ (H, Q) & \mapsto & HQ \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration.

- Surjectivité
  Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
  Comme $MM^* \in H_n^{++}$, on peut diagonaliser par une matrice unitaire. Il existe donc $U \in U_n$ telle que

  $$MM^* = U^*\text{diag}(d_1, ..., d_n)U \text{ où } \forall i \in [\![1, n]\!], d_i > 0.$$

  Posons $H = U^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})U$.
  On veut montrer que $H \in H_n^{++}$.

  $$\begin{array}{rcl} H^* & = & (U^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})U)^* \\ & = & U^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})U \end{array}$$

  Soit $X \in \mathbb{C}^n$, alors

  $$\begin{array}{rcl} X^*HX & = & X^*U^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})UX \\ & = & (UX)^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})UX \end{array}$$

  Posons $UX = Y$, on a donc

  $$\begin{array}{rcl} X^*HX & = & Y^*\text{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})Y \\ & = & \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \dots & \overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \sqrt{d_1}\overline{y_1} & \dots & \sqrt{d_n}\overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i}|y_i|^2 \end{array}$$

  On a $X^*HX > 0$ si $UX \neq 0$ ie si $X \neq 0$.
  Ainsi, $H \in H_n^{++}$ et $H^2 = MM^*$.
  Posons $Q = H^{-1}M$. On a

  $$\begin{array}{rcl} Q^*Q & = & (H^{-1}M)^*H^{-1}M \\ & = & M^*(H^{-1})^*H^{-1}M \\ & = & M^*(H^*)^{-1}H^{-1}M \\ & \underbrace{=}_{H \text{ hermitienne}} & M^*H^{-2}M \\ & = & M^*(M^*)^{-1}M^{-1}M \\ & = & I_n \end{array}$$

  On a bien le théorème puisque $M = HQ$.

- Injectivité
  Soit $((H, Q), (\tilde{H}, \tilde{Q})) \in (H_n^{++} \times U_n)^2$ tels que $M = HQ = \tilde{H}\tilde{Q}$.
  Posons $N = H^{-1}\tilde{H} = Q\tilde{Q}^{-1} \in U_n$.
  Ainsi $N^*N = I_n$ et N diagonalisable.

  $$\text{Sp}(N) \subset S^1.$$

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N associée au vecteur propre X. Alors, $||NX||^2 = |\lambda|^2||X||^2$. Ainsi, $||X||^2 = |\lambda|^2||X||^2$. Par conséquent, $|\lambda| = 1$. Soit $S \in H_n^{++}$ telle que $S^2 = \tilde{H}$.
Posons $N' = SH^{-1}S$.
Alors

$$\begin{aligned} N' &= SN\tilde{H}^{-1}S \\ &= SNS^{-2}S \\ &= SNS^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $N \sim N'$ et $\mathrm{Sp}(N) = \mathrm{Sp}(N')$.
Comme $S \in GL_n(\mathbb{C})$,N' et H^{-1} sont congruentes. Elles représentent donc la même forme quadratique dans deux bases différentes. Ainsi $N' \in H_n^{++}$.
Ainsi, d'après le théorème spectral, N' est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(N') \subset \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathrm{Sp}(N) \subset \mathbb{R}_+^* \cap S^1 = \{1\}$ et donc $N \sim I_n$. Ainsi, $N = I_n$.

- Continuité

On a déjà ϕ continue car polynômiale.
Montrons que $HQ \mapsto (H, Q)$ continue.
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(H_k, Q_k) \in H_n^{++} \times U_n$ tel que $M_k = H_kQ_k$. Il existe aussi $(H, Q) \in H_n^{++} \times U_n$ tel que $M = HQ$.
On sait que $Q_k \in U_n$ qui est compact.
En effet, si on définit l'application continue

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto M^*M \end{aligned}$$

on a que $U_n = \phi^{-1}(I_n)$ et donc U_n est fermé.
De plus, pour tout $U \in U_n$ et pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $||x|| \leq 1$,

$$\begin{aligned} ||Ux||^2 &= {}^tx{}^t\overline{U}Ux \\ &= {}^txx \\ &= ||x||^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $|||U||| = 1$ et donc U_n est borné.
Ainsi, U_n compact.
Soit $(Q_{\phi(k)})$ une sous-suite de (Q_k) qui converge vers $R \in U_n$.
On a

$$H_{\phi(k)} = M_{\phi(k)}Q_{\phi(k)}^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} MR^{-1} := S \in H_n^+ \cap GL_n(\mathbb{C}) = H_n^{++}$$

(car $H_n^{++} \subset H_n^+$ fermé, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $R \in U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$)
Or $M = HQ = SR$ donc par unicité de la décomposition polaire, on a $H = S$ et $Q = R$.
Ainsi, (Q_k) admet une unique valeur d'adhérence dans U_n compact et $Q_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Q$ et donc $H_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} H$

□

Leçons possibles : 106 - 155 - 158 - 160